МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

"На правах рукопису"
УДК 517.927

«До захисту допущено»
Завідувач кафедри
______________ О.І. Клесов

“07” грудня 2018 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

зі спеціальності 111 «Математика»

на тему: «Тауберові теореми для рядів в банаховому просторі»

Виконала:
студентка VI курсу, групи ОМ-71мп
Циганок Оксана Володимирівна __________

Керівник:
доктор фізико-математичних наук, професор
Михайлець В.А. __________

Рецензент:
доктор фізико-математичних наук, доцент, провідний науковий співробітник інституту математики НАН України
Мурач О.О. __________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студентка ______________

Київ – 2018 року

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-професійною програмою

Спеціальність (спеціалізація) – 111 «Математика» («Страхова та фінансова математика»)

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

__________ О.І. Клесов

«30» жовтня 2018 р.

ЗАВДАННЯ

на магістерську дисертацію студенту

Циганок Оксані Володимирівні

1. Тема дисертації «Тауберові теореми для рядів в банаховому просторі», науковий керівник дисертації доктор фізико-математичних наук, професор Михайлець Володимир Андрійович, затверджені наказом по університету від «01» листопада 2018 р. № 4058-с.

2. Термін подання студентом дисертації 10 грудня 2018 р.

3. Об'єкт дослідження: ряди у дійсному або комплексному банаховому просторі довільної вимірності.

4. Предмет дослідження: ознаки збіжності, насамперед тауберові умови рівносильності (C,1) – сумовності та збіжності ряду в банаховому просторі.

5. Перелік завдань, які потрібно розробити:

1) Ознайомитись з літературою за темою магістерської дисертації;

2) Знайти ознаки збіжності рядів в абстрактному банаховому просторі, що узагальнюють теореми Абеля і Діріхле для дійсних числових рядів та Дюбуа-Реймона і Дедекінда для комплексних числових рядів;
3) Отримати абстрактні версії тауберових теорем Фейєра і Гарді для (С,1) – сумовних рядів.
4) Сформулювати та довести нову теорему тауберового типу для (С,1) – сумовних рядів в банаховому просторі;
5) Порівняти теореми тауберового типу між собою.

6. Орієнтовний перелік ілюстративного матеріалу: 14 слайдів.

7. Орієнтовний перелік публікацій:

Циганок О.В. Збіжні ряди в просторах Банаха, Сьома всеукраїнська конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики, 19-20 квітня 2018р., Тези доповідей, Київ, с. 37.

8. Дата видачі завдання: 03.09.2018.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Отримання завдання на магістерську дисертацію. Ознайомлення з літературою за темою магістерської дисертації.	3.09.18 – 24.09.18	Виконано
2.	Дослідження методу сумування Чезаро та методу сумування Валле Пуссена.	25.09.18 – 9.10.18	Виконано
3.	Дослідження тауберових умов (Фейєра та Гарді).	10.10.18 – 17.10.18	Виконано
4.	Формулювання та доведення абстрактних теорем Фейєра та Гарді для рядів в банаховому просторі.	18.10.18 – 29.10.18	Виконано
5.	Формулювання та доведення нової теореми тауберового типу для рядів	30.10.18 – 13.11.18	Виконано

	в банаховому просторі.		
6.	Порівняння тауберових теорем між собою.	14.11.18 – 19.11.18	Виконано
7.	Дослідження застосування тауберових теорем до рядів Фур'є.	20.11.18 – 26.11.18	Виконано
8.	Оформлення магістерської дисертації.	27.11.18 – 3.12.18	Виконано

Студент О.В. Циганок

Науковий керівник дисертації В.А. Михайлець

РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація: 39 сторінок, 7 посилань.

В роботі досліджується збіжність рядів у дійсному або комплексному банаховому просторі довільної вимірності. Знайдено ознаки збіжності таких рядів. Насамперед, тауберові умови збіжності (C,1) – сумовного ряду. В дисертації отримано узагальнення ознак збіжності Абеля, Діріхле, Дюбуа-Реймона і Дедекінда для числових рядів.

Основним результатом роботи є абстрактні версії тауберових теорем Фейєра і Гарді для дійсних числових рядів і нова тауберова теорема, яка узагальнює ці дві абстрактні теореми. Отримані результати застосовано до дослідження рівномірної збіжності рядів Фур'є. Знайдено нову ознаку рівномірної збіжності на відрізку $[\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi]$ таких рядів. Вона посилює відомі теореми Діріхле – Жордана і Гарді у випадку $[\alpha, \beta] = [0, 2\pi]$.

Ключові слова: сума ряду, збіжність ряду, банахів простір, метод сумування Чезаро, тауберові теореми, ряди Фур'є.

ABSTRACT

Master’s thesis: 39 pages, 7references.

The convergence of series in a real or complex Banach space of arbitrary dimensionality is investigated in the master's dissertation. The signs of convergence of such series are found. First of all, the Tauberian conditions of convergence (C, 1) - summation series are found. In the dissertation the generalization of signs of convergence of Abel, Dirichlet, Dubois-Raymond and Dedekind for numerical series is obtained.

The main result of the thesis is the abstract versions of the Tauberian theorems of Fejér and Hardy for real numerical series and the new Tauberian theorem, which generalizes these two abstract theorems. The obtained results are applied to the study of uniform convergence of Fourier series. A new sign of uniform convergence on a segment $[\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi]$ of such series is found. It amplifies the well-known theorems of Dirichlet – Jordan and Hardy in the case $[\alpha, \beta] = [0, 2\pi]$.

Key words: sum of series, convergence of a series, Banach space, Césaro summation method, Tauberian theorems, Fourier series.

ЗМІСТ

ВСТУП

Починаючи з кінця XIX століття досить потужною галуззю математичного аналізу стала теорія підсумовування розбіжних рядів. Значний внесок в цьому напрямі зробили такі відомі математики, як Л. Ойлер, Н. Абель, С. Пуассон, Г. Гарді, Дж. Літтлвуд, Е. Чезаро, А. Таубер, О. Тьопліц, Г.Ф. Вороний, Г. Фробеніус, Е. Ландау, О. Гельдер, Н.К. Барі, Ф. Борель та багато інших.

До цього в якості суми числового ряду брали границю його часткових сум, за припущення, що ця границя існує та скінчена. Але, з розвитком науки виникла потреба вивчати розбіжні ряди. Тому постало питання про можливість їх підсумовування, але в деякому новому сенсі, відмінному від звичайного. Деякі методи такого "сумування" виявилися дуже плідними. Одним із таких методів є метод середніх арифметичних Чезаро або (С,1) – метод, який детальніше буде розглянуто в магістерській дисертації.

Як відомо [1], ряд-добуток $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ двох збіжних рядів $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u$ та $\sum_{n=0}^{\infty} v_n = v$, складений за правилом Коші, тобто

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k},$$

не обов'язково збігається. Але, в 1890 році Е. Чезаро показав, що ряд-добуток (за правилом Коші) будь-яких двох рядів, що збігаються відповідно до сум u та v, сумується методом середніх арифметичних до суми uv.

З XIX століття стало відомо [2], що ряд Фур'є неперервної функції може розбігатися на деякій підмножині. Але, у 1900 році угорський математик Л. Фейєр показав, що ряд Фур'є будь-якої 2π – періодичної неперервної функції рівномірно сумується методом середніх арифметичних на всій осі.

Отже, теорія сумування розбіжних рядів знайшла своє застосування в математичному аналізі, а також дала поштовх новим дослідженням розбіжних рядів.

Проте означення нової "узагальненої суми" повинно підпорядковуватись двом вимогам. По-перше, метод сумування має бути *лінійним*, тобто, якщо ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ приписується “узагальнена сума” A, а ряду $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ – “узагальнена сума” B, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (pa_n + qb_n)$, де p та q – довільні константи, повинен мати “узагальнену суму” $(pA + qB)$.

По-друге, нове означення повинно містити звичайне як окремий випадок. Тобто, ряд, що збігається в звичайному сенсі до суми A, повинен мати “узагальнену суму” також A. Ця властивість називається *регулярністю*. Але з того, що ряд має “узагальнену суму”, взагалі кажучи, не випливає, що він збігається.

Природно, виникає питання, які додаткові умови треба накласти, щоб із того, що ряд має “узагальнену суму” випливало, що він збіжний, а отже, існує сума в звичайному сенсі. Першу теорему в цьому напрямі довів А. Таубер [1] для методу сумування степеневих рядів Абеля. Пізніше багато математиків довели цілий ряд теорем такого типу для різних методів сумування. А теореми такого типу стали називатися тауберовими або тауберового типу.

В магістерській дисертації досліджено тауберові теореми для методу середніх арифметичних Чезаро, знайдено абстрактні версії теорем Фейєра і Гарді, доведено нову теорему тауберового типу, а також порівняно ці теореми між собою та наведено приклади застосування до рядів Фур'є.

1. Збіжність рядів в банаховому просторі

В комплексному або дійсному банаховому просторі X розглядається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n,\ x_n \in \mathrm{X},\ a_n \in \mathbb{C}(\mathbb{R}) \qquad (1.1)$$

Означення 1.1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n,\ x_n \in \mathrm{X}$ називається *абсолютно збіжним,* якщо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \| < \infty.$$

Теорема 1.1. [1] *Якщо ряд збігається абсолютно, то він збігається, а його сума не залежить від порядку членів ряду.*

Необхідну і достатню умову збіжності ряду в X дає відомий критерій Коші.

Означення 1.2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n,\ x_n \in \mathrm{X}$ називається *безумовно збіжним,* якщо для будь-якої перестановки $\{m(k), k \geq 1\}$ множини $\mathbb{N}$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_{m(k)}$$

є збіжним.

Теорема 1.2 [1] *(Рімана). Якщо простір X є скінченновимірним, то безумовна збіжність ряду (1.1) рівносильна його абсолютній збіжності.*

Але, якщо $dim\mathrm{X} = \infty$, то в X існують безумовно збіжні ряди, що не збігаються абсолютно (Дворецький-Роджерс, 1950).

В скінченновимірному просторі для збіжного ряду множина сум, які отримуються при всіх перестановках членів ряду, що зберігають збіжність, утворює афінний многовид (Штейниць, 1916).

В кожному нескінченновимірному банаховому просторі існують ряди, для яких це не так (В.М. Кадець, 1986).

Нові достатні умови неабсолютної збіжності ряду (1.1) дають наступні теореми.

Теорема 1.3. *Ряд (1.1) збігається, якщо*

1) збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - a_{n+1}| < \infty$, *тобто послідовність* $\{a_n, n \ge 1\}$ *має обмежену варіацію.*

Для доведення знадобиться деякі відомі твердження.

Тотожність Абеля [1]:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i = \alpha_m B_m - \sum_{i=1}^{m-1} \left(\alpha_{i+1} - \alpha_i\right) B_i, \text{ де } B_m = \sum_{i=1}^{m} \beta_i .$$

Твердження 1.1. [3] *Якщо ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *збігається, то*

$$\sum_{k=n+1}^{2n} a_n \to 0,\ n \to \infty.$$

Доведення: Розглянемо суму

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k x_k = \sum_{i=1}^{m} a_{n+i} x_{n+i},\ \forall m \in \mathbb{N}.$$

В тотожності Абеля покладемо

$$\alpha_i = a_{n+i},\ \beta_i = x_{n+i},\ B_m = \sum_{i=1}^{m} \beta_i ,$$

отримаємо

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k x_k = \sum_{i=1}^{m} a_{n+i} x_{n+i}, = a_{m+n} B_m - \sum_{i=1}^{m-1} \left(a_{n+i+1} - a_{n+i}\right) B_i .$$

Очевидно, що

$$\left\| B_m \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{m} \beta_i \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+m} x_k \right\| = \left\| S_{m+n} - S_n \right\| \le \left\| S_{m+n} \right\| + \left\| S_n \right\| \le 2C,\ \forall m \ge 1.$$

З іншого боку, з умови 1 та Твердження 1.1 випливає

$$B_m = \sum_{k=n+1}^{n+m} x_k \to 0,\ n \to \infty,$$

а звідси

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{R} : \forall n \ge N \ \forall m \ge 1 \ \left\| B_m \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+m} x_k \right\| \le \frac{\varepsilon}{2L}.$$

З умови 2 та Твердження 1.1 випливає

$$\sum_{k=n+1}^{n+m-1} |a_{k+1} - a_k| \to 0, n \to \infty,$$

тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{R} : \forall n \geq N \, \forall m \geq 1 \sum_{k=n+1}^{n+m-1} |a_{k+1} - a_k| \leq \frac{\varepsilon}{4C}.$$

Оскільки послідовність $\{a_n, n \geq 1\}$ має обмежену варіацію, то вона обмежена, тобто

$$\exists L \in \mathbb{R} : \forall n \geq 1 \; |a_n| \leq L.$$

Отже, одержуємо умову критерію Коші

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k x_k \right\| = \left\| a_{m+n} B_m - \sum_{i=1}^{m-1} (a_{n+i+1} - a_{n+i}) B_i \right\| \leq |a_{n+m}| \cdot \|B_m\| + \sum_{k=n+1}^{n+m} |a_{k+1} - a_k| \cdot \|B_{k-n}\| \leq$$

$$\leq L \cdot \frac{\varepsilon}{2L} + 2C \sum_{k=n+1}^{n+m} |a_{k+1} - a_k| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2C \cdot \frac{\varepsilon}{4C} = \varepsilon. \quad \blacktriangle$$

Теорема 1.4. *Ряд (1.1) збігається, якщо*

1) *частинні суми ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *обмежені в сукупності в X;*

2) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - a_{n+1}| < \infty, \; a_n \to 0, \; n \to \infty.$

Доведення. Розглянемо суму

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k x_k = \sum_{i=1}^{m} a_{n+i} x_{n+i}, \; \forall m \in \mathbb{N}.$$

В тотожності Абеля покладемо

$$\alpha_i = a_{n+i}, \; \beta_i = x_{n+i}, \; B_m = \sum_{i=1}^{m} \beta_i,$$

отримаємо

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k x_k = \sum_{i=1}^{m} a_{n+i} x_{n+i}, = a_{m+n} B_m - \sum_{i=1}^{m-1} (a_{n+i+1} - a_{n+i}) B_i.$$

Умова 1 означає, що

$$\exists C \in \mathbb{R} : \forall n \geq 1 \; \|S_n\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| \leq C,$$

а звідси випливає, що

$$\|B_m\| = \left\|\sum_{i=1}^{m}\beta_i\right\| = \left\|\sum_{k=n+1}^{n+m} x_k\right\| = \|S_{m+n} - S_n\| \le \|S_{m+n}\| + \|S_n\| \le 2C,\ \forall m \ge 1.$$

З умови 2 та Твердження 1.1 маємо, що

$$\sum_{k=n+1}^{n+m-1}|a_{k+1} - a_k| \to 0,\ n \to \infty,$$

а звідси випливає

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{R}:\ \forall n \ge N\ \sum_{k=n+1}^{n+m-1}|a_{k+1} - a_k| \le \frac{\varepsilon}{4C}.$$

З того, що $a_n \to 0,\ n \to \infty$ випливає

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{R}:\ \ \forall n \ge N\ |a_n| \le \frac{\varepsilon}{4C}.$$

Отже, одержуємо умову критерію Коші

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k x_k\right\| = \left\|a_{m+n}B_m - \sum_{i=1}^{m-1}\left(a_{n+i+1} - a_{n+i}\right)B_i\right\| \le |a_{n+m}| \cdot \|B_m\| + \sum_{k=n+1}^{n+m}|a_{k+1} - a_k| \cdot \|B_{k-n}\| \le$$

$$\le 2C \cdot \frac{\varepsilon}{4C} + 2C \cdot \frac{\varepsilon}{4C} = \varepsilon.\quad \blacktriangle$$

Теореми 1.3 та 1.4 узагальнюють відповідно теореми Абеля та Діріхле для дійсних числових рядів та Дюбуа-Реймона і Дедекінда для комплексних.

Теорема 1.4 дозволяє зокрема встановити рівномірну в середині інтервалу (0,2π) збіжність комплексних тригонометричних рядів до неперервної в (0,2π) функції. Ці ряди не завжди є рядами Фур'є інтегрованих за Лебегом функцій.

Покладемо

$$S_{m,n}(x) = \sum_{k=m}^{n} e^{ikx},\ \{m,n\} \in \mathbb{Z},\ m < n.$$

Лема 1.1. *Для всіх* $x \in (0, 2\pi)$ *і всіх* $\{m,n\} \in \mathbb{Z}$ *виконується нерівність*

$$|S_{m,n}(x)| \le \frac{\sqrt{2}}{\sin\frac{x}{2}} \tag{1.2}$$

Доведення. Розглянемо

$$|S_{m,n}(x)| = \left|\sum_{k=m}^{n} e^{ikx}\right| = \left|\sum_{k=m}^{n}\cos kx + i\sin kx\right|.$$

Використовуючи відому тригонометричну формулу

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos\left(x-y\right)-\cos\left(x+y\right)\right),$$

отримаємо

$$\left|\sum_{k=m}^{n}\sin kx\right| = \frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\left|\sum_{k=m}^{n}2\sin\frac{x}{2}\sin kx\right| = \frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\left|\sum_{k=m}^{n}\left(\cos\left(\frac{x}{2}-kx\right)-\cos\left(\frac{x}{2}+kx\right)\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\cdot\left|\cos\left(\frac{x}{2}-mx\right)-\cos\left(\frac{x}{2}+nx\right)\right| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

Аналогічно можна отримати

$$\left|\sum_{k=m}^{n}\cos kx\right| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

Отже,

$$\left|S_{m,n}(x)\right| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\left|1+i\right| = \frac{\sqrt{2}}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}. \quad \blacktriangle$$

Введемо ваговий банахів простір C_W, що складається з усіх комплекснозначних неперервних на інтервалі $(0,2\pi)$ функцій, для яких є скінченою норма

$$\left\| f(\bullet)\middle|C_W \right\| = \sup_{x\in(0,2\pi)}\left|f(x)\right|\sin\frac{x}{2} \tag{1.3}$$

Простір C_W містить і деякі несумовні функції. Зокрема

$$\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x} \in C_W.$$

Коефіцієнти Фур'є таких функцій не можуть бути визначені через інтеграл Лебега.

Теорема 1.5. *Нехай*

1) $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|c_k - c_{k+1}\right| < \infty,\ c_k \to 0,\ \left|k\right| \to +\infty$

тоді частинні суми $S_{m,n}(x)$ *тригонометричного ряду*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx},\ \ c_k \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{Z} \tag{1.4}$$

збігаються в банаховому просторі C_W, *коли* $m \to -\infty$, *а* $n \to +\infty$.

Доведення. З нерівності (1.2) і формули (1.3) випливає, що частинні суми $S_{m,n}(x)$ ряду $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikx}$ обмежені в банаховому просторі C_W.

З теореми 1.4 випливає, що ряд (1.4) збігається в банаховому просторі C_W, коли $m \to -\infty$, а $n \to +\infty$. ▲

Зокрема, оскільки функція $\sin\frac{x}{2}$ відокремлена від нуля на кожному з відрізків $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, то комплексний функціональний ряд (1.4) збігається рівномірно на компактних підмножинах інтервалу $(0,2\pi)$.

2. Теорема Тьопліца для банахового простору

Існує цілий ряд прийомів, що дозволяють приписати "суму" розбіжному ряду. Ці прийоми називають методами сумування рядів.

Найбільш використовуються лінійні методи сумування, які будуються за наступним принципом.

Нехай A – деяка матриця з нескінченним числом рядків і стовпців

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & \cdots & a_{0n} & \cdots \\ a_{10} & \cdots & a_{1n} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ a_{n0} & \cdots & a_{nn} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Замість розгляду звичайних часткових сум S_n ряду $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ розглядають

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S_k, \; n \geq 0, \tag{2.1}$$

за умови, що ряди в правих частинах цих рівностей збігаються.

Означення 2.1. Якщо існує границя $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = S,$ то S називають *"сумою"* ряду $\sum_{n=0}^{\infty} x_n,$ і кажуть, що метод, визначений матрицею A, підсумовує ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ до S.

Означення 2.2. Метод підсумовування називається *лінійним*, якщо виконуються наступні умови:

1) якщо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ сумується до S,то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} Cx_n$, де C – стала, сумується за цим же методом до суми CS;
2) якщо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ сумується суми S_1, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n)$ сумується за цим же методом до суми $S + S_1$.

Означення 2.3. Метод сумування називається *регулярним*, якщо будь-який збіжний ряд сумується за цим методом до S, що є його сумою в класичному сенсі, тобто

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n .$$

Теорема 2.1 [2] *(Тьопліца). Для регулярності лінійного методу, визначеного матрицею А, необхідно і достатньо, щоб були виконані наступні умови:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} = 0,\ k \ge 0;$

2) якщо $A_n = a_{n0} + a_{n1} + \ldots + a_{nk} + \ldots$ *, то* $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = 1;$

3) якщо $K_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_{nk}|,$ *то* $K_n \le C\ \ \forall n \ge 1,\ C$ *– стала.*

Ці умови називають *"умовами Тьопліца"*, а матриці, що їх задовольняють – *Т-матрицями*.

Доведення. Доведемо лише достатність.

Нехай

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n .$$

Покладемо $S_n = S + \varepsilon_n$, тоді $\varepsilon_n \to 0,\ n \to \infty.$ Але

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S_k = S\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}\varepsilon_k = S \cdot A_n + \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}\varepsilon_k .$$

Оскільки, в силу умови 2, $A_n \to 1,\ n \to \infty$, залишається довести, що

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}\varepsilon_k = 0.$$

Нехай задано $\varepsilon > 0;$ виберемо N наскільки великим, що $|\varepsilon_k| < \varepsilon$ для $k > N,$ тоді

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}\varepsilon_k\right| \le \left|\sum_{k=0}^{N} a_{nk}\varepsilon_k\right| + \varepsilon \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_{nk}|.$$

В першій сумі за умовою 1: $a_{nk} \to 0,\ n \to \infty,$ а ε_k обмежені в сукупності; отже, при $n \to \infty,$ ця сума прямує до 0. Друга сума, за умовою 3, не перевищує $\varepsilon C,$ оскільки C – константа, а ε – взято довільно малим, тому права частина може бути як завгодно малою з ростом n. ▲

З теореми Тьопліца випливають абстрактні узагальнення теорем Штольца і Коші.

Теорема 2.2 *(Штольца). Припустимо, що послідовності* $\{x_n, n \geq 1\} \subset X$ *і* $\{y_n, n \geq 1\} \subset \mathbb{C}$ *задовольняють умови:*

1) $\forall n \geq 1:\ y_n < y_{n+1};$

2) $y_n \to +\infty,\ n \to +\infty;$

3) існує $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = S,\ S \in X.$

Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = S.$

Доведення. Можна припусти, що $y_1 > 0$. Покладемо:

$$x_0 = 0,\ y_0 = 0;$$

$$a_{nk} = \frac{y_k - y_{k-1}}{y_n},\ 1 \leq k \leq n,\ n \geq 1;$$

$$S_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}},\ n \geq 1.$$

Числа $\{a_{nk}\}$ задовольняють умовам теореми 2.1 (Тьопліца):

$$a_{nk} > 0,\ 1 \leq k \leq n,\ n \geq 1;$$

$$\forall k \geq 1:\ a_{nk} = \frac{y_k - y_{k-1}}{y_n} \to 0,\ n \to \infty;$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{nk} = \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k - y_{k-1}}{y_n} = \frac{y_n - y_0}{y_n} = \frac{y_n}{y_n} = 1,\ n \geq 1.$$

Тому за теоремою 2.1 (Тьопліца):

$$\sum_{k=1}^{n} a_{nk} S_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k - y_{k-1}}{y_n} \cdot \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}} = \frac{x_n}{y_n} \to S,\ n \to \infty. \quad \blacktriangle$$

Теорема 2.3 *(Коші). Якщо послідовність* $\{u_n : n \geq 1\} \subset X$ *має границю, то ту ж границю має і послідовність*

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}.$$

Доведення. Покладемо в теоремі 2.2 (Штольца)

$$y_n = n,\ x_n = u_1 + \ldots + u_n,$$

тоді умови теореми 2.2 (Штольца) виконуються:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{n-n+1} = \lim_{n\to\infty}u_n.$$

Припустимо, що $\lim\limits_{n\to\infty}u_n = u.$

Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{u_1 + \ldots + u_n}{n} = \lim_{n\to\infty}v_n = u. \quad \blacktriangle$$

3. Середні Чезаро. Необхідна умова (C,1) – сумовності

Нехай дано ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ – в банаховому просторі *X*. По частковим сумам S_n цього ряду побудуємо їх послідовні середні арифметичні:

$$\sigma_0 = S_0,\ \sigma_1 = \frac{S_0 + S_1}{2}, \dots,\ \sigma_n = \frac{S_0 + S_1 \dots + S_n}{n+1}, \dots .$$

Означення 3.1. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = S,$ то це S і називають *(C,1) – сумою* даного ряду; а величини

$$\sigma_n = \frac{S_0 + S_1 \dots + S_n}{n+1},\ n \ge 1$$

називають *середніми Чезаро*.

Теорема 3.1. [4] *Метод сумування Чезаро є регулярним.*

Доведення. Якщо існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S,$ то за теоремою 2.3 (Коші) буде

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \frac{S_0 + S_1 \dots + S_n}{n+1} = S. \quad \blacktriangle$$

Теорема 3.2 (*Необхідна умова (C,1) сумовності*). *Якщо ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *сумується за методом середніх арифметичних (C,1) до суми S, то*

$$\| x_n \| = o(n).$$

Доведення.

$$\sigma_{n-1} \to S,\ \frac{n+1}{n}\sigma_n \to S,\ n \to \infty.$$

$$\left\| \frac{(n+1)\sigma_n - n\sigma_{n-1}}{n} \right\| = \left\| (n+1)\frac{S_0 + \dots + S_n}{n(n+1)} - n\frac{S_0 + \dots + S_{n-1}}{n^2} \right\| = \left\| \frac{S_n}{n} \right\| \to 0,\ n \to \infty.$$

$$\left\| \frac{x_n}{n} \right\| = \left\| \frac{S_n}{n} - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{S_{n-1}}{n-1} \right\| \to 0,\ n \to \infty.$$

Звідси маємо:

$$\| x_n \| = o(n). \quad \blacktriangle$$

Розглянемо деякі приклади.

Приклад 1. [1] Розглянемо ряд, який розглядав Ойлер:

$$1-1+1-1+\ldots,$$

$$S_0=1,\ S_1=0,\ S_2=1,\ S_3=0,\ \ldots,\ S_{2k}=1,\ S_{2k+1}=0,\ \ldots,\ k\geq 1.$$

$$\sigma_{2k}=\frac{k+1}{2k+1},\ \sigma_{2k-1}=\frac{k}{2k-1+1}=\frac{k}{2k}=\frac{1}{2}.$$

$$\sigma_{2k}=\frac{k+1}{2k+1}\to\frac{1}{2},\ k\to\infty,\ \sigma_{2k-1}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \sigma_n\to\frac{1}{2},\ n\to\infty.$$

Отже, розбіжний в звичайному сенсі ряд має скінченну узагальнену суму в сенсі Чезаро, $\frac{1}{2}$.

Приклад 2. Розглянемо ряд:

$$1-2+3-4+\ldots.$$

$$S_0=1,\ S_1=-1,\ S_2=2,\ S_3=-2,\ \ldots,\ S_{2k}=k+1,\ S_{2k+1}=-(k+1),\ \ldots,\ k\geq 1.$$

$$\sigma_{2k}=\frac{k+1}{2k+1}\to\frac{1}{2},\ k\to\infty,$$

$$\sigma_{2k-1}=\frac{-(k+1)}{2(k+1)}=-\frac{1}{2}.$$

Отже, не існує $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n$, тому такий ряд не сумовний за Чезаро.

Приклад 3. [5] Розглянемо ряд

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx,\ \ x\neq 2k\pi,\ \ k\in\mathbb{N}.$$

Цей ряд розбіжний для всіх значень $x\neq 2k\pi$, оскільки для цих x $\lim\limits_{n\to\infty}\cos nx\neq 0.$

Покажемо, що цей ряд (C,1) – сумовний. Часткова сума цього ряду S_n має вигляд:

$$S_n=\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx.$$

Помножимо це на $2\sin\frac{x}{2}$ та використавши відомі тригонометричні формули, отримаємо

$$2\sin\frac{x}{2}S_n=\sin\frac{x}{2}+\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{x}{2}\cos kx=\sin\frac{x}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right]=$$

$$=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x.$$

Звідси маємо:

$$S_n = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Тепер підсумуємо ці часткові суми:

$$\sum_{k=0}^{n} S_k = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=0}^{n}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}\sum_{k=0}^{n}\sin\frac{x}{2}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}\sum_{k=0}^{n}\left[\cos(kx)-\cos(k+1)x\right] = \frac{1}{4\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}\left(1-\cos(n+1)x\right) =$$

$$= \frac{1}{4\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}\cdot 2\left(\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)x\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2.$$

Знайдемо тепер середнє арифметичне часткових сум:

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{n+1}\cdot O(1)\to 0,\ \ n\to\infty.$$

Отже, даний розбіжний ряд є (C,1) – сумовним до нуля.

4. Критерій збіжності (С,1) – сумовного ряду

Теорема 4.1. *Для того, щоб (С,1) – сумовний ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *збігався необхідно і достатньо, щоб*

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} kx_k \to 0,\ \ n \to \infty.$$

Доведення. Маємо [2]

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} kx_k = \frac{1}{n+1}\Big(\big(S_n - S_0\big) + \big(S_n - S_1\big) + \ldots + \big(S_n - S_n\big)\Big) = S_n - \frac{S_0 + \ldots + S_n}{n+1} =$$
$$= S_n - \sigma_n =: \Delta_n.$$

Необхідність. Якщо ряд є збіжним, то його сума $S = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$, бо (С,1) метод сумування є регулярним. Якщо $S_n \to S,$ то $\sigma_n \to S,$ тоді

$$\Delta_n = S_n - \sigma_n \to 0,\ n \to \infty.$$

Достатність. Навпаки, нехай $\Delta_n \to 0,\ n \to \infty,$ і $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma,$ тоді

$$S_n \to \sigma.\ \ \blacktriangle$$

Наслідок 4.1. *Якщо*

$$\| x_n \| = o\left(\frac{1}{n}\right),\ \ n \to \infty$$

і ряд є (С,1) – сумовним, то він збіжний.

Доведення. Нехай ε – довільне додатне число. З умови, що

$$\| x_n \| = o\left(\frac{1}{n}\right),\ \ n \to \infty$$

випливає, що $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\forall n \ge n_0\ \ \| n x_n \| \le \varepsilon.$$

Тому

$$0 \le \left\| \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} kx_k \right\| \le \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \| kx_k \| = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0} \| kx_k \| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0+1}^{n} \| kx_k \| \le$$
$$\le \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0} \| kx_k \| + \varepsilon.$$

Переходячи в цій нерівності до границі при $n \to \infty,$ маємо:

$$0 \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n+1} \left\| \sum_{k=0}^{n_0} k x_k \right\| \le \varepsilon.$$

В силу довільності $\varepsilon > 0$ маємо, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \| k x_k \| = 0. \quad \blacktriangle$$

5. Середні Валле Пуссена

Нехай задано ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ з частковими сумами S_n. Покладемо:

$$\sigma_{n,n} = \frac{S_n + S_{n+1} + ... + S_{2n-1}}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{5.1}$$

Означення 5.1. Послідовність часткових сум $\{S_n,\, n \ge 1\}$ сумується *до S за методом Валле Пуссена*, якщо

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{n,n} = S.$$

Ряд *сумується до S методом Валле Пуссена*, якщо послідовність його часткових сум сумується до *S* цим методом.

Означення 5.2. Нехай дана послідовність $\{S_n,\, n \ge 1\} \subset X.$ Величини

$$\sigma_{n,m} = \frac{S_n + S_{n+1} + ... + S_{n+m-1}}{m}, \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \tag{5.2}$$

називаються *запізнюючими середніми арифметичними.*

Величина m – величина усереднення, а n – величина запізнення. Ясно, що $n = 0,$ то $\sigma_{0,m+1} = \dfrac{S_0 + S_1 + ... + S_m}{m+1} = \sigma_m$ – звичайне середнє арифметичне, $\sigma_{n,1} = S_n$ – часткова сума ряду.

Теорема 5.1. [6] *Справедлива тотожність*

$$\sigma_{n,m} = \frac{n}{m}\left(\sigma_{n+m-1} - \sigma_{n-1}\right) + \sigma_{n+m-1}, \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \tag{5.3}$$

Доведення. Маємо

$$\sigma_{n,m} = \frac{S_n + S_{n+1} + ... + S_{n+m-1}}{m} = \frac{S_0 + ... + S_{n+m-1}}{m} - \frac{S_0 + ... + S_{n-1}}{m} =$$

$$= \frac{S_0 + ... + S_{n+m-1}}{m+n} \cdot \frac{n+m}{m} - \frac{S_0 + ... + S_{n-1}}{n} \cdot \frac{n}{m} = \frac{n}{m}\left(\sigma_{n+m-1} - \sigma_{n-1}\right) + \sigma_{n+m-1}. \ \blacktriangle$$

Теорема 5.2. [6] *Нехай* $\lim_{k\to\infty} m_k = \lim_{k\to\infty} n_k = +\infty,\ n_k = O(m_k),$ *тоді метод Валле Пуссена не слабший, ніж метод Чезаро, тобто*

$$\sigma_k \to S,\ k \to \infty \ \Rightarrow \sigma_{n_k,m_k} \to S,\ k \to \infty.$$

Доведення. Нехай

$$\sigma_k \to S,\ k \to \infty,$$

тоді за теоремою 2.1 та теоремою 5.1:

$$\sigma_{n_k,m_k} = \frac{n_k}{m_k}\left(\sigma_{n_k+m_k-1} - \sigma_{n_k-1}\right) + \sigma_{n_k+m_k-1} =$$
$$= O(1)\cdot o(1) + S + o(1) \to S,\ k \to \infty. \ \blacktriangle$$

Теорема 5.3. *Метод Валле Пуссена є регулярним за умови, що* $n = O(m)$.

Доведення. Це випливає з того, що метод Чезаро є регулярним. За умови, що $n = O(m)$ застосуємо теорему 5.1.

$$\sigma_{n,m} = \frac{n}{m}\left(\sigma_{n+m-1} - \sigma_{n-1}\right) + \sigma_{n+m-1} = O(1)\cdot o(1) + S + o(1) \to S. \ \blacktriangle$$

Тотожність (5.3) можна переписати у вигляді:

$$\sigma_{n,m} = \left(1 + \frac{n}{m}\right)\sigma_{n+m-1} - \frac{n}{m}\sigma_{n-1}, \quad \forall\, n, m \in \mathbb{N} \tag{5.4}$$

Для сум σ_m маємо:

$$\sigma_m = \frac{1}{m+1}\sum_{l=0}^{m} S_l = \frac{1}{m+1}\sum_{l=0}^{m}\sum_{j=0}^{l} x_j = \frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m}(m+1-j)\,x_j,$$

тобто

$$\sigma_m = \sum_{j=0}^{m+1}\left(1 - \frac{j}{m+1}\right)x_j. \tag{5.5}$$

Тому з (5.4) випливає

$$\sigma_{n,m} = \left(1 + \frac{n}{m}\right)\sum_{j=0}^{n+m}\left(1 - \frac{j}{n+m}\right)x_j - \frac{n}{m}\sum_{j=0}^{n}\left(1 - \frac{j}{n}\right)x_j = \sum_{j=0}^{n+m}\left(\frac{n+m}{m} - \frac{j}{m}\right)x_j - \sum_{j=0}^{n}\left(\frac{n}{m} - \frac{j}{m}\right)x_j =$$
$$= \sum_{j=0}^{n}\left(\frac{n+m}{m} - \frac{j}{m} - \frac{n}{m} + \frac{j}{m}\right)x_j + \sum_{j=n+1}^{n+m}\left(\frac{n+m}{m} - \frac{j}{m}\right)x_j.$$

Таким чином

$$\sigma_{n,m} = S_n + \sum_{j=n+1}^{n+m}\left(1 - \frac{j-n}{m}\right)x_j. \tag{5.6}$$

6. Тауберові теореми

Як вже було сказано, метод сумування повинен бути лінійним та регулярним. Цим вимогам відповідає метод сумування Чезаро. Виникає питання, які додаткові умови треба накласти, щоб із того, що ряд сумується, в даному випадку за Чезаро, випливало, що він збігається. Над цим питанням працювало багато математиків, але першим теорему такого типу довів А. Таубер [1], але для методу степеневих рядів. Від тоді теореми такого типу стали називати тауберовими або тауберового типу.

Нехай, далі в банаховому просторі *X* розглядається ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k,\ x_k \in \mathrm{X}.$$

Для цього ряду надалі будемо розглядати тауберові теореми.

а) Абстрактна форма теореми Фейєра

Теорема 6.1. *Якщо ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ *(C,1) – сумовний і*

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\| x_k\|^2 < \infty,$$

то ряд збіжний.

Доведення. Нехай $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$. Тоді

$$\|S_n - \sigma_n\| = \left\|\sum_{k=0}^{n} \frac{kx_k}{n+1}\right\| \le \sum_{k=0}^{n} \frac{k\| x_k\|}{n+1}.$$

$$S_n - \sigma_n = S_n - \frac{S_0 + \ldots + S_n}{n+1} = \frac{(n+1)S_n - (S_0 + \ldots + S_n)}{n+1} = \frac{(nS_n - (S_0 + \ldots + S_{n-1}))}{n+1} =$$

$$= \frac{1}{n+1}\big(n(x_0 + \ldots + x_n) - (x_0 + x_0 + x_1 + \ldots + x_0 + \ldots + x_{n-1})\big) = \frac{x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n}{n+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{kx_k}{n+1}.$$

Отже, достатньо довести, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} k\| x_k\| = 0.$$

Нехай, $\forall \varepsilon > 0$ виберемо *p* так, щоб

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} k\|x_k\|^2 < \varepsilon^2,$$

тоді, використовуючи нерівність Коші-Буняковського, маємо

$$\sum_{k=p+1}^{n} k\|x_k\| = \sum_{k=p+1}^{n} \sqrt{k}\left(\sqrt{k}\|x_k\|\right) \le \sqrt{\sum_{k=p+1}^{n} k \sum_{k=p+1}^{n} k\|x_k\|^2} \le \sqrt{\sum_{k=0}^{n} k\varepsilon^2} \le n\varepsilon,$$

а звідси випливає, що

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} k\|x_k\| = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{p} k\|x_k\| + \frac{1}{n}\sum_{k=p+1}^{n} k\|x_k\| \le 2\varepsilon,$$

якщо n достатньо велике. ▲

б) Абстрактна форма теореми Гарді

Теорема 6.2. *Якщо ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ *(C,1) – сумовний і*

$$\| x_n \| = O\left(\frac{1}{n}\right), \; n \to \infty,$$

то він збігається.

Доведення. Нехай

$$\| x_n \| \le \frac{C}{n}, \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Тоді

$$\left\| \sigma_{n,m} - S_n \right\| = \left\| \frac{S_n + S_{n+1} + \ldots + S_{n+m-1}}{m} - S_n \right\| =$$

$$= \left\| \frac{S_n + \left(S_n + x_{n+1}\right) + \ldots + \left(S_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+m-1}\right)}{m} - S_n \right\| =$$

$$= \left\| \frac{\left(m-1\right) x_{n+1}}{m} + \ldots + \frac{x_{n+m-1}}{m} \right\| \le C\left(\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+m-1} \right) \le \frac{Cm}{n}. \tag{6.1}$$

Нехай $\varepsilon > 0,$ виберемо таке $n_\varepsilon \in \mathbb{N},$ щоб $\frac{C}{n} < \varepsilon.$ Для кожного $n \ge n_\varepsilon$ позначимо через m_n максимально можливе значення $m,$ при якому $\frac{Cm_n}{n} < \varepsilon.$ Тоді із оцінки (6.1) отримаємо:

$$\left\| \sigma_{n,m_n} - S_n \right\| < \varepsilon, \quad \forall n \ge n_\varepsilon.$$

Оскільки

$$\frac{C\left(m_n + 1\right)}{n} \ge \varepsilon,$$

то $n = O\left(m_n\right),$ і за теоремою 5.2, маємо:

$$\sigma_{n,m_n} \to S.$$

Нехай

$$\left\| \sigma_{n,m_n} - S \right\| \le \varepsilon, \; \forall n \ge n_\varepsilon.$$

Тоді $\left\| S_n - S \right\| \le 2\varepsilon, \quad \forall n \ge n_\varepsilon,$ тобто

$$S_n \to S. \quad \blacktriangle$$

в) Нова теорема

Теорема 6.3. *Нехай ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ *задовольняє умови:*

1) $\sum_{k=n+1}^{\infty} \| x_k \|^2 = O\left(\frac{1}{n}\right), \ n \to \infty;$

2) ряд є (C,1) – сумовним до $S \in X$.

Тоді ряд збігається в банаховому просторі X *до* S.

Нехай $\sum_{k=n+1}^{\infty} \| x_k \|^2 \le \frac{M}{n}, \ n \in \mathbb{N}.$

Доведення. З відомої тотожності (5.6):

$$\sigma_{n,m} = S_n + \sum_{j=n+1}^{n+m} \left(1 - \frac{j-n}{m}\right) x_j$$

випливає, що при $m > 1$

$$\left\| \sigma_{n,m} - S_n \right\| \le \sum_{j=n+1}^{n+m} \left(1 - \frac{j-n}{m}\right) \| x_j \| = \sum_{j=n+1}^{n+m-1} \left(1 - \frac{j-n}{m}\right) \| x_j \|.$$

З нерівності Коші-Буняковського маємо:

$$\left\| \sigma_{n,m} - S_n \right\| \le \left(\sum_{j=n+1}^{n+m-1} \left(1 - \frac{j-n}{m}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=n+1}^{n+m-1} \| x_j \|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{m-1} \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \| x_j \|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тому, в силу умови 1) теореми, маємо:

$$\left\| \sigma_{n,m} - S_n \right\| \le \sqrt{(m-1)\frac{M}{n}}.$$

Остання нерівність очевидним чином виконується і при $m = 1$ $\left(\sigma_{n,1} = S_n\right)$. Візьмемо довільне число $\varepsilon > 0$ і покладемо

$$m := m(n) = \left[n\varepsilon^2 \right] + 1,$$

де $[a]$ – ціла частина числа a. Тоді

$$\left\| \sigma_{n,m} - S_n \right\| \le \sqrt{\left[n\varepsilon^2 \right] \frac{M}{n}} \le \sqrt{M}\,\varepsilon.$$

Але

$$\frac{n}{m} < \frac{n}{(n\varepsilon^2)} = \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Тому при вибраному $\varepsilon > 0$ в силу тотожності (5.4)

$$\sigma_{n,m} = \left(1 + \frac{n}{m}\right) \sigma_{n+m-1} - \frac{n}{m} \sigma_{n-1}$$

і умови 2) теореми

$$\sigma_{n,m} = \left(1+\frac{n}{m}\right)\sigma_{n+m-1} - \frac{n}{m}\sigma_{n-1} = \sigma_{n+m-1} + \frac{n}{m}\left(\sigma_{n+m-1} - \sigma_{n-1}\right) \to S,\ n \to \infty.$$

Тому для достатньо великих n $\left(n > n_0\right)$ буде

$$\left\|S - \sigma_{n,m}\right\| < \varepsilon.$$

А тоді при цих n

$$\left\|S - S_n\right\| \le \left\|S - \sigma_{n,m}\right\| + \left\|\sigma_{n,m} - S_n\right\| < \varepsilon + \sqrt{M}\varepsilon.$$

В силу довільності числа $\varepsilon > 0$ це означає, що

$$S_n \to S,\ n \to \infty.\ \blacktriangle$$

г) Порівняння тауберових теорем між собою

Порівняємо теорему 6.3 і теорему 6.1.

Умова теореми 6.1

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \| x_k \|^2 < \infty.$$

Звідси випливає

$$\sum_{k=n}^{\infty} k \| x_k \|^2 = o(1),\ n \to \infty.$$

$$o(1) = \sum_{k \ge n} k \| x_k \|^2 \ge \sum_{k=n}^{\infty} n \| x_k \|^2 = n \sum_{k=n}^{\infty} \| x_k \|^2.$$

Звідси отримаємо:

$$\sum_{k=n}^{\infty} \| x_k \|^2 = o\left(\frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right),\ n \to \infty.$$

Отримали умову теореми 6.3.

Отже, якщо виконуються умови теореми 6.1, то будуть виконуватись і умови теореми 6.3. Тому теорема 6.3 не слабша за теорему 6.1.

Порівняємо теорему 6.3 і теорему 6.2.

Нехай виконується умова теореми 6.2, тобто

$$\| x_n \| = O\left(\frac{1}{n}\right),\ n \to \infty.$$

Перевіримо, чи будуть виконуватись умови теореми 6.3.

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \| x_k \|^2 \le C \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \le C \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sim C \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{C}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Якщо виконується умова теореми 6.2, то виконується і умова теореми 6.3. Отже, теорема 6.3 не слабша за теорему 6.2.

Зауваження. *В наступному пункті буде доведено, що теорема 6.3 сильніша, ніж теорема 6.2.*

Розглянемо приклад.

Приклад. Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}},\ \alpha \ge 0.$$

Цей ряд збігається при $\alpha > 0$ за ознакою Лейбніца.

Перевіримо, при яких значеннях α буде виконуватись умова теореми 6.1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{1}{n^{2\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2\alpha-1}}.$$

А цей ряд збігається, коли $2\alpha-1>1$ як узагальнений гармонічний.

Отже, при $\alpha>1$ виконується умова теореми 6.1.

Перевіримо тепер при яких значеннях α виконується умова теореми 6.2:

$$\frac{1}{n^{\alpha}} = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

а це буде вірним при $\alpha \geq 1$.

Отже, при $\alpha \geq 1$ буде виконуватись умова теореми 6.2.

Тепер перевіримо, при яких значеннях α буде виконуватись умова теореми 6.3, маємо:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{2\alpha}} \leq \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^{2\alpha}} \sim \int_{n}^{\infty}\frac{dx}{x^{2\alpha}} = \frac{1}{2\alpha-1}\cdot\frac{1}{n^{2\alpha-1}} = O\left(\frac{1}{n^{2\alpha-1}}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

а це буде виконуватись при $\alpha \geq 1$.

Отже, при $\alpha \geq 1$ виконується умова теореми 6.3.

На цьому прикладі можна побачити, що теорема 6.2 не слабша за теорему 6.1, а також, що теорема 6.3 сильніша, ніж теорема 6.1.

7. Застосування до рядів Фур'є

У XIX ст. Дюбуа-Реймон (1831 – 1889) побудував перший приклад 2π – періодичної неперервної функції, ряд Фур'є якої розбігається в деякій точці. До цього під впливом ідей Діріхле, безуспішно намагалися довести збіжність ряду Фур'є 2π – періодичної неперервної функції в кожній точці (і навіть рівномірну збіжність).

Приклад Дюбуа-Реймона формально спростував гіпотезу Фур'є про представлення функції тригонометричним рядом. Постало питання про те, які додаткові умови (крім неперервності та періодичності) треба накласти на функцію, щоб її ряд Фур'є збігався до неї рівномірно.

Однак, угорський математик Л. Фейєр (1880 – 1959) показав у 1900 році, що можна змінити розуміння суми ряду так, щоб гіпотеза Фур'є виявилась справедливою для кожної 2π – періодичної неперервної функції. Для цього слід розуміти під сумою ряду не границю його часткових сум, а границю середніх арифметичних з них. Теорема Фейєра стимулювала розвиток теорії сумування числових і функціональних рядів.

Нехай $S_n(x, f)$ – часткова сума ряду Фур'є $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$ функції f, обчислена в точці $x \in \mathbb{R}$. Покладемо:

$$\sigma_n(x, f) = \frac{S_0(x, f) + \ldots + S_n(x, f)}{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}_0.$$

Теорема 7.1 [7] *(Фейєра в посиленій формі). Нехай* $[\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi]$. *Тоді якщо* $f \in C_{[\alpha,\beta]}$, *то* $\sigma_n(x, f) \to f,\ n \to \infty$ *рівномірно на відрізку* $[\alpha, \beta]$.

Нехай $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $P = P_{[a,b]} = \left\{x_k : k = \overline{0, n}\right\}$ – розбиття сегмента $[a, b]$, $\Delta f_k =: f(x_{k+1}) - f(x_k)$.

Означення 7.1. *Варіацією* функції f, відповідною розбиттю P, називається

$$V_P(f; a, b) = \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta f_k|.$$

Означення 7.2. Якщо $\exists M \in \mathbb{R} : \forall\ P_{[a,b]}\quad V_P\left(f;\, a,b\right) \le M,$ то f називається *функцією обмеженої варіації* на $\left[a,b\right]$.

$BV_{[\alpha,\beta]}$ – клас всіх функцій, що мають обмежену варіацію на відрізку $\left[\alpha,\beta\right]$.

Теорема 7.2 *(Діріхле – Жордана, про рівномірну збіжність ряду Фур'є в посиленій формі). Якщо функція* $f \in C_{[\alpha,\beta]} \cap BV_{[\alpha,\beta]}$, *то ряд Фур'є функції f збігається до неї рівномірно на* $\left[\alpha,\beta\right]$.

Теорема 7.2 (Діріхле – Жордана) випливає із принципу локалізації Рімана.

Теорема 7.3 [6] *(про оцінки коефіцієнтів Фур'є функції обмеженої варіації). Якщо* $f \in V_{2\pi}$, *то коефіцієнти Фур'є функції f мають порядок* $O\left(\frac{1}{n}\right)$, *тобто*

$$c_n = O\left(\frac{1}{n}\right),\ n \to \infty,$$

де

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{itn}dt.$$

Теорема 7.4 *(Гарді, для рядів Фур'є в посиленій формі). Нехай маємо ряд Фур'є функції* $f \in C_{[\alpha,\beta]}$ *і* $|\,c_n| = O\left(\frac{1}{n}\right)$, *тоді ряд Фур'є збігається рівномірно на* $\left[\alpha,\beta\right]$.

Теорема 7.4 (Гарді) узагальнює теорему 7.2 (Діріхле – Жордана).

Теорема 7.5 *(Теорема 6.3 для рядів Фур'є в посиленій формі). Якщо функція* $f \in C_{[\alpha,\beta]}$ *і*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\,c_k|^2 = O\left(\frac{1}{n}\right),\ n \to \infty,$$

то ряд збігається рівномірно на $\left[\alpha,\beta\right]$.

Зауваження. *Теорема 7.5 сильніша за теорему 7.4 (Гарді). Покажемо це на прикладі.*

Приклад. Розглянемо функцію Вейєрштрасса:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x),$$

де a – довільне непарне натуральне число, а b – додатне, $0<b<1$.

При $a\cdot b>1+\frac{3}{2}\pi$ функція $f(x)$ неперервна на $\mathbb{R}$, але недиференційована в жодній точці. Пізніше Гарді встановив, що $f(x)$ недиференційована навіть при $a\cdot b>1$.

Розглянемо функцію Вейєрштрасса при $b=\frac{1}{2}$, $a=3$, тобто

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos(3^n \pi x).$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos(3^n \pi x)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\pi x),$$

де

$$c_k=\begin{cases}0,\ k\neq 3^n;\\ \left(\frac{1}{2}\right)^n,\ k=3^n.\end{cases}$$

Умови теореми 7.2 (Діріхле – Жордана) не виконується, бо функція має необмежену варіацію, оскільки скрізь недиференційована.

Застосуємо теорему 7.4 (Гарді), де замість умови на варіацію треба умова:

$$c_n=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$c_{3^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n=O\left(\frac{1}{3^n}\right)\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^n\le C\cdot\frac{1}{3^n}\Rightarrow\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n}\le C.$$

Звідси випливає, що

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n\le C,\ n\to\infty,$$

а цього не може бути, оскільки $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ зростає при $n\to\infty$.

Отже, теорема 7.4 (Гарді) не виконується.

Перевіримо, чи виконується теорема 7.5, де замість умови теореми 7.4 (Гарді) треба умова

$$\sum_{k=n}^{\infty} |c_k|^2 = O\left(\frac{1}{n}\right), \ n \to \infty.$$

Оскільки,

$$|c_k|^2 = |c_{3^n}|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n,$$

тоді

$$\sum_{k=n}^{\infty} |c_k|^2 = \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{n-1}} = O\left(\frac{1}{3^n}\right) \ \Rightarrow \ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{n-1}} \le \frac{C}{3^n}$$

$$\Rightarrow \ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{n-1}} \cdot 3^n \le C \ \Rightarrow \ \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \le C.$$

Це справді так, оскільки $\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \le 1,$ функція спадає і $\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \to 0, \ n \to \infty,$ тому ця функція дійсно обмежена.

Отже, теорема 7.5 справджується. Тому з цього прикладу можна побачити, що умови теореми 7.2 (Діріхле – Жордана) і теореми 7.4 (Гарді) не виконуються, а умови теореми 7.5 виконуються, а значить теорема 7.5 сильніша, ніж теорема 7.4 (Гарді) та не слабша, ніж теорема 7.2 (Діріхле – Жордана).

ВИСНОВКИ

У магістерській дисертації отримано такі нові результати:

- ознаки збіжності рядів в абстрактному банаховому просторі, що узагальнюють теореми Абеля і Діріхле для дійсних числових рядів та Дюбуа-Реймона і Дедекінда для комплексних числових рядів;
- отримано абстрактні версії тауберових теорем Фейєра і Гарді для (C,1) – сумовних рядів. Доведено, що теорема Гарді сильніша за теорему Фейєра;
- знайдено нову тауберову теорему для (C,1) – сумовних в банаховому просторі рядів і доведено, що вона сильніша за теорему Гарді;
- знайдено нову ознаку рівномірної збіжності на відрізку $[\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi]$ класичних рядів Фур'є.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

[1] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, том II / Г. М. Фихтенгольц. – Москва: "Наука", 1970. – 800 с.

[2] Бари Н. К. Тригонометрические ряды / Н. К. Бари. – Москва, 1961. – 936 с.

[3] Дороговцев А. Я. Математичний аналіз, частина 1 / А. Я. Дороговцев. – Київ: "Либідь", 1993. – 319 с.

[4] Харди Г. Расходящиеся ряды / Г. Харди. – Москва, 1951. – 504 с.

[5] Барон С. Введение в теорию суммируемости рядов / С. Барон. – Таллин: "Валгус", 1977. – 278 с.

[6] Ляшко И. И. Основы классического и современного математического анализа / И. И. Ляшко, В. Ф. Емельянов, А. К. Боярчук. – Киев: "Выща школа", 1988. – 591 с.

[7] Зигмунд А. Тригонометрические ряды, том I / А. Зигмунд. – Москва: "Мир", 1965. – 615 с.